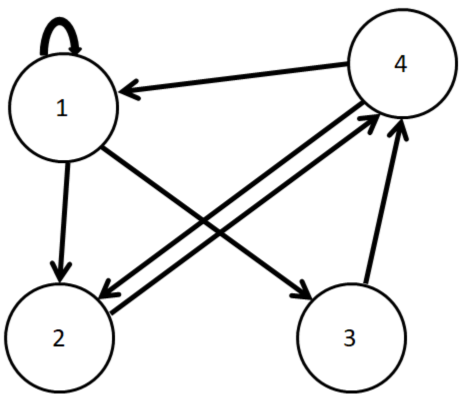
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Dept. Computación y Tecnología de la Información
Estructuras Discretas II
CI 2526
Mayo-Julio 2021

Práctica 8
Soluciones
Gustavo Lau
2021-07-11

Comentario acerca de la clase pasada:



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si elevan al cuadrado una matriz de adyacencia M con la aritmética usual (sin convertir los números mayores a 1 en unos), ¿qué es el valor de M^2_{ij}?

$$M^2_{ij} = M_{i1}M_{1j} + M_{i2}M_{2j} + M_{i3}M_{3j} + M_{i4}M_{4j}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El número de caminos de longitud 2 que van del nodo i al nodo j.

¿Qué es el valor de M^3_{ij}?

$$M^3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El número de caminos de longitud 3 que van del nodo i al nodo j.

¿Qué indica M_{ij}^k? El número de caminos de longitud k que van del nodo i al nodo j.

Definiciones

Relación de equivalencia. Una relación en un conjunto A se llama relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Nota: En el segundo párrafo de la página 35 del libro del profesor Yriarte debería decir "relación de equivalencia" en vez de "relación de orden parcial":

2.6. EJEMPLOS DE RELACIONES 35

Relaciones de Orden

Una relación de orden parcial es una relación que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. La relación $\leq$ en los enteros y en los reales es una relación de orden. Se estudiarán en detalle en el próximo capítulo.

Relaciones de Equivalencia

Una relación de ~~orden parcial~~ equivalencia es una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva. La relación de equivalencia más conocida es la relación de igualdad. Las relaciones de equivalencia sirven para definir los conjuntos numéricos: enteros, racionales, reales, enteros modulo n. En general permiten construir nuevos conjuntos a partir de otros. Se estudiarán en detalle en el capítulo seis.

Relación reflexiva.

$$R \text{ es reflexiva en } A \equiv \forall a \in A\ ((a,a) \in R)$$

Relación simétrica.

$$R \text{ es simétrica en } A \equiv \forall a,b \in A\ ((a,b) \in R \implies (b,a) \in R)$$

Relación transitiva.

$$R \text{ es transitiva en } A \equiv \forall a,b,c \in A\ ((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \implies (a,c) \in R)$$

Clase de equivalencia. Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A y x es un elemento de A se define la clase de equivalencia de x como el conjunto de los elementos de A que están relacionados mediante R con x:

$$R[x] = \{y \in A : xRy\}$$

Cuando R se sobreentiende simplemente se usa la notación $[x]$ para la clase de equivalencia de x .

Conjunto cociente. Al conjunto de las clases de equivalencia en las cuales una relación de equivalencia R sobre un conjunto A parte al conjunto se denomina conjunto cociente de A con respecto a R y se denota por

$$A/R = \{R[x] : x \in A\}$$

1. Sobre el producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de los pares ordenados de números naturales se define la relación $=_{\mathbb{Z}}$ de la siguiente forma:

$$((a,b),(c,d)) \in =_{\mathbb{Z}} \iff a + d = b + c$$

La notación $(a,b) =_{\mathbb{Z}} (c,d)$ significa $((a,b),(c,d)) \in =_{\mathbb{Z}}$.

Demuestre que $=_{\mathbb{Z}}$ es una relación de equivalencia.

Respuesta

Para demostrar que $=_{\mathbb{Z}}$ es una relación de equivalencia hay que demostrar que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Lo que hay que recordar siempre en esta relación es que el conjunto base A es el producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, entonces sus elementos son pares ordenados.

Reflexiva: Queremos demostrar que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ ((a,b),(a,b)) \in =_{\mathbb{Z}}$$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ a + b = b + a) \implies \forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ ((a,b) =_{\mathbb{Z}} (a,b))$$

Simétrica: Queremos demostrar que

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ (((a,b),(c,d)) \in =_{\mathbb{Z}} \implies ((c,d),(a,b)) \in =_{\mathbb{Z}})$$

$$\begin{aligned}
& (a,b) =_{\mathbb{Z}} (c,d) \\
\equiv \quad & \langle \text{Definición de } =_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& a + d = b + c \\
\equiv \quad & \langle \text{Propiedades de la suma y la igualdad en } \mathbb{N} \rangle \\
& c + b = d + a \\
\equiv \quad & \langle \text{Definición de } =_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& (c,d) =_{\mathbb{Z}} (a,b)
\end{aligned}$$

Transitiva: Queremos demostrar que

$$\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ (((a,b),(c,d)) \in =_{\mathbb{Z}} \wedge ((c,d),(e,f)) \in =_{\mathbb{Z}} \implies ((a,b),(e,f)) \in =_{\mathbb{Z}})$$

$$
\begin{aligned}
& (a,b) =_{\mathbb{Z}} (c,d) \wedge (c,d) =_{\mathbb{Z}} (e,f) \\
\equiv \quad & \langle \text{Definición de } =_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& a + d = b + c \wedge c + f = d + e \\
\Longrightarrow \quad & \langle \text{Sumando las igualdades} \rangle \\
& a + d + c + f = b + c + d + e \\
\Longrightarrow \quad & \langle \text{Cancelando } d + c \rangle \\
& a + f = b + e \\
\equiv \quad & \langle \text{Definición de } =_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& (a,b) =_{\mathbb{Z}} (e,f)
\end{aligned}
$$

2. *a*) Describa las clases de equivalencia de la relación $=_{\mathbb{Z}}$.

   b) Describa el conjunto cociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / =_{\mathbb{Z}}$. A este conjunto se le conoce como el conjunto de los números enteros y lo denotamos $\mathbb{Z}$. Al entero $[(n,0)]$ lo denotamos n y al entero $[(0,n)]$ lo denotamos $-n$.

   Respuesta

   a) Informalemte:

$$\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a - b \text{ es constante}\}$$

   Esta respuesta es informal pues depende de la definición de la resta de los enteros y estamos definiendo los enteros. Para cada número natural n hay las siguientes clases de equivalencia:

$$[(n,0)] = \{(n+i,i) : i \in \mathbb{N}\} = \{(n,0),(n+1,1),(n+2,2),...\}$$

$$[(0,n)] = \{(i,n+i) : i \in \mathbb{N}\} = \{(0,n),(1,n+1),(2,n+2),...\}$$

   Si n es 0 ambos conjuntos son iguales, si $n \neq 0$ los dos conjuntos son diferentes.

   b) El conjunto cociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / =_{\mathbb{Z}}$ es el conjunto de los conjuntos descritos en a):

$$\{[(0,n)] : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{[(0,0)]\} \cup \{[(n,0)] : n \in \mathbb{N}^*\}$$

   donde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

3. Definamos la suma y el producto de dos números enteros $m = [(a,b)]$ y $n = [(c,d)]$ como:

$$[(a,b)] +_{\mathbb{Z}} [(c,d)] = [(a +_{\mathbb{N}} c, b +_{\mathbb{N}} d)]$$

   y

$$[(a,b)] *_{\mathbb{Z}} [(c,d)] = [((a *_{\mathbb{N}} c) +_{\mathbb{N}} (b *_{\mathbb{N}} d), (a *_{\mathbb{N}} d) +_{\mathbb{N}} (b *_{\mathbb{N}} c))]$$

   Si usamos los signos usuales de suma y multiplicación para la suma y multiplicación de números naturales estas definiciones se pueden escribir como:

$$[(a,b)] +_{\mathbb{Z}} [(c,d)] = [(a+c, b+d)]$$

$$[(a,b)] *_{\mathbb{Z}} [(c,d)] = [(ac+bd, ad+bc)]$$

Demuestre que

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}\ (m +_{\mathbb{Z}} n = n +_{\mathbb{Z}} m)$$

Respuesta

Noten que la descripción informal de las clases de equivalencia:

$$\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a - b \text{ es constante}\}$$

nos da la intuición de por qué se definen la suma y el producto de esa manera. Lo que define una clase de equivalencia es la diferencia entre sus coordenadas, entonces:

$$\begin{aligned}
(a-b)+(c-d) &= (a+c)-(b+d)\\
(a-b)(c-d) &= (ac+bd)-(ad+bc)
\end{aligned}$$

Suponiendo $m = [(a,b)], n = [(c,d)]$:

$$\begin{aligned}
& m +_{\mathbb{Z}} n \\
= & \\
& [(a,b)] +_{\mathbb{Z}} [(c,d)] \\
= & \quad \langle \text{Definición de } +_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& [(a+c, b+d)] \\
= & \quad \langle \text{Conmutatividad de la suma en } \mathbb{N} \rangle \\
& [(c+a, d+b)] \\
= & \quad \langle \text{Definición de } +_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& [(c,d)] +_{\mathbb{Z}} [(a,b)] \\
= & \\
& n +_{\mathbb{Z}} m
\end{aligned}$$

4. Demuestre que
$$\forall m, n, p \in \mathbb{Z}\ ((m +_{\mathbb{Z}} n) +_{\mathbb{Z}} p = m +_{\mathbb{Z}} (n +_{\mathbb{Z}} p))$$

   Respuesta

   Suponiendo $m = [(a,b)], n = [(c,d)], p = [(e,f)]$:

$$\begin{aligned}
& (m +_{\mathbb{Z}} n) +_{\mathbb{Z}} p \\
= \quad & \\
& ([(a,b)] +_{\mathbb{Z}} [(c,d)]) +_{\mathbb{Z}} [(e,f)] \\
= \quad & \langle \text{Definición de } +_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& [(a+c, b+d)] +_{\mathbb{Z}} [(e,f)] \\
= \quad & \langle \text{Definición de } +_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& [((a+c)+e, (b+d)+f)] \\
= \quad & \langle \text{Asociatividad de la suma en } \mathbb{N} \rangle \\
& [(a+(c+e), b+(d+f))] \\
= \quad & \langle \text{Definición de } +_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& [(a,b)] +_{\mathbb{Z}} [(c+e, d+f)] \\
= \quad & \langle \text{Definición de } +_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& [(a,b)] +_{\mathbb{Z}} ([(c,d)] +_{\mathbb{Z}} [(e,f)]) \\
= \quad & \\
& m +_{\mathbb{Z}} (n +_{\mathbb{Z}} p)
\end{aligned}$$

5. Demuestre que
$$\exists x \in \mathbb{Z}\ (\forall m \in \mathbb{Z}\ (m +_{\mathbb{Z}} x = m))$$

   Respuesta

   Supongamos que $m = [(a,b)]$. Sea $x = [(0,0)]$. Entonces:

$$\begin{aligned}
& m +_{\mathbb{Z}} x \\
= \quad & \\
& [(a,b)] +_{\mathbb{Z}} [(0,0)] \\
= \quad & \langle \text{Definición de } +_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& [(a+0, b+0)] \\
= \quad & \\
& [(a,b)] \\
= \quad & \\
& m
\end{aligned}$$

6. Demuestre que
$$\forall m \in \mathbb{Z}\ (\exists m' \in \mathbb{Z}\ (m +_{\mathbb{Z}} m' = [(0,0)]))$$

Respuesta

Suponiendo $m = [(a,b)], m' = [(c,d)]$:

$$\begin{array}{ll} & m +_{\mathbb{Z}} m' \\ = & \\ & [(a,b)] +_{\mathbb{Z}} [(c,d)] \\ = & \langle \text{Definición de } +_{\mathbb{Z}} \rangle \\ & [(a+c, b+d)] \\ = & \\ & [(e,e)] \\ = & \langle e + 0 = e + 0 \rangle \\ & [(0,0)] \end{array}$$

¿Cuánto tienen que valer c y d para que siempre sea verdad?

Dado $m = [(a,b)]$, definimos $m' = [(b,a)]$, entonces:

$$\begin{array}{ll} & m +_{\mathbb{Z}} m' \\ = & \\ & [(a,b)] +_{\mathbb{Z}} [(b,a)] \\ = & \langle \text{Definición de } +_{\mathbb{Z}} \rangle \\ & [(a+b, b+a)] \\ = & \langle \text{Conmutatividad de la suma en } \mathbb{N} \rangle \\ & [(a+b, a+b)] \\ = & \langle a + b + 0 = a + b + 0 \rangle \\ & [(0,0)] \end{array}$$

7. Demuestre que

$$\forall m, n, p \in \mathbb{Z}\ (m *_{\mathbb{Z}} (n +_{\mathbb{Z}} p) = (m *_{\mathbb{Z}} n) +_{\mathbb{Z}} (m *_{\mathbb{Z}} p))$$

Respuesta

Suponiendo $m = [(a,b)], n = [(c,d)], p = [(e,f)]$:

$$\begin{array}{ll}
 & m *_{\mathbb{Z}} (n +_{\mathbb{Z}} p) \\
= & \\
 & [(a,b)] *_{\mathbb{Z}} ([(c,d)] +_{\mathbb{Z}} [(e,f)]) \\
= & \langle \text{Definición de } +_{\mathbb{Z}} \rangle \\
 & [(a,b)] *_{\mathbb{Z}} [(c+e, d+f)] \\
= & \langle \text{Definición de } *_{\mathbb{Z}} \rangle \\
 & [(a(c+e) + b(d+f), a(d+f) + b(c+e))] \\
= & \\
 & [(ac + ae + bd + bf, ad + af + bc + be)] \\
= & \\
 & [((ac+bd) + (ae+bf), (ad+bc) + (af+be))] \\
= & \langle \text{Definición de } +_{\mathbb{Z}} \rangle \\
 & [(ac+bd, ad+bc)] +_{\mathbb{Z}} [(ae+bf, af+be)] \\
= & \langle \text{Definición de } *_{\mathbb{Z}} \rangle \\
 & ([(a,b)] *_{\mathbb{Z}} [(c,d)]) +_{\mathbb{Z}} ([(a,b)] *_{\mathbb{Z}} [(e,f)]) \\
= & \\
(m *_{\mathbb{Z}} n) +_{\mathbb{Z}} (m *_{\mathbb{Z}} p)) &
\end{array}$$

8. Demuestre que

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}\ (m *_{\mathbb{Z}} n = n *_{\mathbb{Z}} m)$$

Respuesta

Suponiendo $m = [(a,b)], n = [(c,d)]$:

$$\begin{array}{ll}
 & m *_{\mathbb{Z}} n \\
= & \\
 & [(a,b)] *_{\mathbb{Z}} [(c,d)] \\
= & \langle \text{Definición de } *_{\mathbb{Z}} \rangle \\
 & [(ac+bd, ad+bc)] \\
= & \langle \text{Conmutatividad de la suma y el producto en } \mathbb{N} \rangle \\
 & [(ca+db, cb+da)] \\
= & \langle \text{Definición de } *_{\mathbb{Z}} \rangle \\
 & [(c,d)] *_{\mathbb{Z}} [(a,b)] \\
= & \\
 & n *_{\mathbb{Z}} m
\end{array}$$

9. Demuestre que

$$\forall m, n, p \in \mathbb{Z}\ ((m *_{\mathbb{Z}} n) *_{\mathbb{Z}} p = m *_{\mathbb{Z}} (n *_{\mathbb{Z}} p))$$

Respuesta

Suponiendo $m = [(a,b)], n = [(c,d)], p = [(e,f)]$:

$$\begin{array}{ll}
& (m *_{\mathbb{Z}} n) *_{\mathbb{Z}} p \\
= & \\
& ([(a,b)] *_{\mathbb{Z}} [(c,d)]) *_{\mathbb{Z}} [(e,f)] \\
= & \quad \langle \text{Definición de } *_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& [(ac+bd, ad+bc)] *_{\mathbb{Z}} [(e,f)] \\
= & \quad \langle \text{Definición de } *_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& [((ac+bd)e + (ad+bc)f, (ac+bd)f + (ad+bc)e)] \\
= & \quad \langle \text{Propiedades de la suma y el producto en } \mathbb{N} \rangle \\
& [(ace+bde+adf+bcf, acf+bdf+ade+bce)] \\
= & \quad \langle \text{Propiedades de la suma y el producto en } \mathbb{N} \rangle \\
& [(a(ce+df)+b(cf+de), a(cf+de)+b(ce+df))] \\
= & \quad \langle \text{Definición de } *_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& [(a,b)] *_{\mathbb{Z}} [(ce+df, cf+de)] \\
= & \quad \langle \text{Definición de } *_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& [(a,b)] *_{\mathbb{Z}} ([(c,d)] *_{\mathbb{Z}} [(e,f)]) \\
= & \\
& m *_{\mathbb{Z}} (n *_{\mathbb{Z}} p)
\end{array}$$

10. Demuestre que

$$\exists x \in \mathbb{Z}\ (\forall m \in \mathbb{Z}\ (m *_{\mathbb{Z}} x = m))$$

Respuesta

Suponiendo $m = [(a,b)], x = [(c,d)]$:

$$\begin{array}{ll}
& m *_{\mathbb{Z}} x \\
= & \\
& [(a,b)] *_{\mathbb{Z}} [(c,d)] \\
= & \quad \langle \text{Definición de } *_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& [(ac+bd, ad+bc)] \\
= & \\
& [(a,b)] \\
= & \\
& m
\end{array}$$

¿Cuánto tienen que valer c y d para que siempre sea verdad?

Supongamos que $m = [(a,b)]$. Sea $x = [(1,0)]$. Entonces:

$$
\begin{array}{ll}
 & m *_{\mathbb{Z}} x \\
= & \\
 & [(a,b)] *_{\mathbb{Z}} [(1,0)] \\
= & \quad \langle \text{Definición de } *_{\mathbb{Z}} \rangle \\
 & [(a1 + b0, a0 + b1)] \\
= & \\
 & [(a,b)] \\
= & \\
 & m
\end{array}
$$

11. Demuestre que

$$m *_{\mathbb{Z}} n = [(0,0)] \implies m = [(0,0)] \vee n = [(0,0)]$$

Respuesta

Suponiendo $m = [(a,b)], n = [(c,d)]$:

$$
\begin{array}{ll}
 & m *_{\mathbb{Z}} n = [(0,0)] \\
\equiv & \\
 & [(a,b)] *_{\mathbb{Z}} [(c,d)] = [(0,0)] \\
\equiv & \quad \langle \text{Definición de } *_{\mathbb{Z}} \rangle \\
 & [(ac + bd, ad + bc)] = [(0,0)] \\
\equiv & \quad \langle \text{Definición de } =_{\mathbb{Z}} \rangle \\
 & ac + bd + 0 = ad + bc + 0 \\
\equiv & \\
 & ac + bd = ad + bc
\end{array}
$$

Si $a \geq b$ y $c \geq d$:

$$
\begin{aligned}
& ac + bd = ad + bc \\
\equiv \\
& ac - ad = bc - bd \\
\equiv \\
& a(c-d) = b(c-d) \\
\equiv \\
& (a-b)(c-d) = 0 \\
\Longrightarrow & \quad \langle \text{Propiedad 13 de la página 68 del libro del profesor Yriarte} \rangle \\
& a - b = 0 \vee c - d = 0 \\
\equiv \\
& a = b \vee c = d \\
\equiv \\
& [(a,b)] = [(0,0)] \vee [(c,d)] = [(0,0)] \\
\equiv \\
& m = [(0,0)] \vee n = [(0,0)]
\end{aligned}
$$

Si $a \geq b$ y $c \leq d$:

$$
\begin{aligned}
& ac + bd = ad + bc \\
\equiv \\
& bd - bc = ad - ac \\
\equiv \\
& b(d-c) = a(d-c) \\
\equiv \\
& (a-b)(d-c) = 0 \\
\Longrightarrow & \quad \langle \text{Propiedad 13 de la página 68 del libro del profesor Yriarte} \rangle \\
& a - b = 0 \vee d - c = 0 \\
\equiv \\
& [(a,b)] = [(0,0)] \vee [(c,d)] = [(0,0)] \\
\equiv \\
& m = [(0,0)] \vee n = [(0,0)]
\end{aligned}
$$

Si $a \leq b$ y $c \geq d$:

$$ac + bd = ad + bc$$
$$\equiv$$
$$ac - ad = bc - bd$$
$$\equiv$$
$$a(c-d) = b(c-d)$$
$$\equiv$$
$$(b-a)(c-d) = 0$$
$\Longrightarrow$ ⟨Propiedad 13 de la página 68 del libro del profesor Yriarte⟩
$$b - a = 0 \lor c - d = 0$$
$$\equiv$$
$$[(a,b)] = [(0,0)] \lor [(c,d)] = [(0,0)]$$
$$\equiv$$
$$m = [(0,0)] \lor n = [(0,0)]$$

El caso $a \leq b$ y $c \leq$ es análogo.

$$\therefore m *_{\mathbb{Z}} n = [(0,0)] \implies m = [(0,0)] \lor n = [(0,0)]$$

Analizamos los casos para evitar un argumento circular (no queremos usar la propiedad de los enteros que estamos demostrando). Estamos usando la propiedad análoga de los números naturales:

68 *CAPÍTULO 4. NÚMEROS NATURALES*

En la Tabla 6.2.4 se muestra una lista de las propiedades de los números naturales que se mencionan en el capítulo. El estudiante debe asegurarse de poder demostrar cada una de esas propiedades.

Tabla 4.1: Propiedades de los Naturales

1.	$m + n \in I\!N$	16.	$m^n * m^p = m^{n+p}$
2.	$m + 0 = 0 + m = m$	17.	$(m^n)^p = m^{n*p}$
3.	$m + (n + p) = (m + n) + p$	18.	$m \leq n \vee n \leq m \vee m = n$
4.	$m + n = n + m$	19.	$m \leq n \Longrightarrow m + p \leq n + p$
5.	$m * n \in I\!N$	20.	$m \leq n \wedge p \leq q \Longrightarrow m + p \leq n + q$
6.	$m * 0 = 0 * m = 0$	21.	$m \leq m + n$
7.	$m * 1 = 1 * m = m$	22.	$m + n = p \Longrightarrow m \leq p$
8.	$m * n = n * m$	23.	$m \leq n \Longrightarrow m * p \leq n * p$
9.	$m * (n * p) = (m * n) * p$	24.	$m * n = p \Longrightarrow m \leq p \vee n = 0$
10.	$(m + n) * p = m * p + n * p$	25.	$n \neq 0 \Longrightarrow m \leq m * n$
11.	$m * (n + p) = m * n + m * p$	26.	$m \leq n \wedge n \leq p \Longrightarrow m \leq p$
12.	$m + n = 0 \Longrightarrow m = 0 \wedge n = 0$	27.	$m \leq n \wedge n \leq m \Longrightarrow m = n$
13.	$m * n = 0 \Longrightarrow m = 0 \vee n = 0$	28.	$m \leq n \Longrightarrow (\exists k \in I\!N)(m + k = n)$
14.	$m * n = 1 \Longrightarrow m = 1 \wedge n = 1$	29.	m y suc (m) son consecutivos
15.	$m \neq 0 \wedge m * n = m * p \Longrightarrow n = p$	30.	$n \leq p \Longrightarrow m^n \leq m^p$

12. **Definiciones:**

    Relación de orden parcial. Una relación en un conjunto A se llama relación de orden parcial si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

    Relación reflexiva.

    $$R \text{ es reflexiva en } A \equiv \forall a \in A \ ((a,a) \in R)$$

    Relación antisimétrica.

    $$R \text{ es antisimétrica en } A \equiv \forall a,b \in A \ ((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \implies a = b)$$

    Relación transitiva.

    $$R \text{ es transitiva en } A \equiv \forall a,b,c \in A \ ((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \implies (a,c) \in R)$$

    Se define en $\mathbb{Z}$ la siguiente relación

    $$[(a,b)] \leq_{\mathbb{Z}} [(c,d)] \iff a + d \leq b + c$$

    Demuestre que $\leq_{\mathbb{Z}}$ es una relación de orden parcial.

    Respuesta

    Para demostrar que $\leq_{\mathbb{Z}}$ es una relación de orden parcial hay que demostrar que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

    Reflexiva:

    $$\begin{array}{ll} & a + b \leq b + a \\ \implies & \langle \text{Definición de } \leq_{\mathbb{Z}} \rangle \\ & [(a,b)] \leq_{\mathbb{Z}} [(a,b)] \end{array}$$

    Antisimétrica:

    $$\begin{array}{ll} & [(a,b)] \leq_{\mathbb{Z}} [(c,d)] \wedge [(c,d)] \leq_{\mathbb{Z}} [(a,b)] \\ \equiv & \langle \text{Definición de } \leq_{\mathbb{Z}} \rangle \\ & a + d \leq b + c \wedge c + b \leq d + a \\ \equiv & \langle \text{Conmutatividad de la suma en } \mathbb{N} \rangle \\ & a + d \leq b + c \wedge b + c \leq a + d \\ \implies & \langle \text{Antisimetría de } \leq \text{ en } \mathbb{N} \rangle \\ & a + d = b + c \\ \equiv & \langle \text{Definición de } =_{\mathbb{Z}} \rangle \\ & (a,b) =_{\mathbb{Z}} (c,d) \end{array}$$

Transitiva:

$$
\begin{aligned}
& [(a,b)] \leq_{\mathbb{Z}} [(c,d)] \wedge [(c,d)] \leq_{\mathbb{Z}} [(e,f)] \\
\equiv \quad & \langle \text{Definición de } \leq_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& a + d \leq b + c \wedge c + f \leq d + e \\
\Longrightarrow \quad & \langle \text{Sumando las dos desigualdades} \rangle \\
& a + d + c + f \leq b + c + d + e \\
\equiv \quad & \\
& a + f \leq b + e \\
\equiv \quad & \langle \text{Definición de } \leq_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& [(a,b)] \leq_{\mathbb{Z}} [(e,f)]
\end{aligned}
$$

13. Demuestre que

$$m \leq_{\mathbb{Z}} n \Longrightarrow m +_{\mathbb{Z}} p \leq_{\mathbb{Z}} n +_{\mathbb{Z}} p$$

Respuesta

Suponiendo $m = [(a,b)], n = [(c,d)], p = [(e,f)]$:

$$
\begin{aligned}
& m \leq_{\mathbb{Z}} n \\
\equiv \quad & \\
& [(a,b)] \leq_{\mathbb{Z}} [(c,d)] \\
\equiv \quad & \langle \text{Definición de } \leq_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& a + d \leq b + c \\
\equiv \quad & \langle \text{Sumando } e + f \text{ a ambos lados y reordenando} \rangle \\
& a + e + d + f \leq b + f + c + e \\
\equiv \quad & \langle \text{Definición de } \leq_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& [(a+e, b+f)] \leq_{\mathbb{Z}} [(c+e, d+f)] \\
\equiv \quad & \langle \text{Definición de } +_{\mathbb{Z}} \rangle \\
& [(a,b)] +_{\mathbb{Z}} [(e,f)] \leq_{\mathbb{Z}} [(c,d)] +_{\mathbb{Z}} [(e,f)] \\
\equiv \quad & \\
& m +_{\mathbb{Z}} p \leq_{\mathbb{Z}} n +_{\mathbb{Z}} p
\end{aligned}
$$

14. La desigualdad estricta en $\mathbb{Z}$ se define análogmente:

$$[(a,b)] <_{\mathbb{Z}} [(c,d)] \iff a+d < b+c$$

Demuestre que

$$m \leq_{\mathbb{Z}} n \wedge 0 <_{\mathbb{Z}} p \implies m *_{\mathbb{Z}} p \leq_{\mathbb{Z}} n *_{\mathbb{Z}} p$$

Respuesta

Suponiendo $m = [(a,b)], n = [(c,d)], p = [(e,f)]$:

$m \leq_{\mathbb{Z}} n \wedge 0 <_{\mathbb{Z}} p$

$\equiv$

$[(a,b)] \leq_{\mathbb{Z}} [(c,d)] \wedge [(0,0)] <_{\mathbb{Z}} [(e,f)]$

$\equiv$ ⟨Definición de $\leq_{\mathbb{Z}}$⟩

$a+d \leq b+c \wedge 0+f < 0+e$

$\equiv$

$a+d \leq b+c \wedge f < e$

$\equiv$

$a+d \leq b+c \wedge e-f > 0$

$\equiv$ ⟨Propiedad 23 de la página 68. Multiplicando la primera desigualdad por $(e-f)$⟩

$(e-f)(a+d) \leq (e-f)(b+c)$

$\equiv$

$e(a+d) + f(b+c) \leq f(a+d) + e(b+c)$

$\equiv$

$ae + bf + cf + de \leq af + be + ce + df$

$\equiv$ ⟨Definición de $\leq_{\mathbb{Z}}$⟩

$[(ae+bf, af+be)] \leq_{\mathbb{Z}} [(ce+df, cf+de)]$

$\equiv$ ⟨Definición de $*_{\mathbb{Z}}$⟩

$[(a,b)] *_{\mathbb{Z}} [(e,f)] \leq_{\mathbb{Z}} [(c,d)] *_{\mathbb{Z}} [(e,f)]$

$\equiv$

$m *_{\mathbb{Z}} p \leq_{\mathbb{Z}} n *_{\mathbb{Z}} p$